Вариант по математике № 1

Инструкция по проверке и оценке работ учащихся по математике

Часть 1

Каждое правильно выполненное задание части 1 оценивается 1 баллом. Задания части 1 считаются выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

№ задания	Ответ
B1	4
B2	3200
B3	15
B4	1,8
B5	185700
B6	6
B7	144
B8	-1,5
B9	8,5
B10	2
B11	15
B12	12

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
C1	$\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$
C2	$\arcsin\frac{12\sqrt{13}}{65}$
C3	$(0;\log_4 257-4)\cup(\log_4 65;+\infty)$
C4	40 или 20
C5	$m=4$
C6	4

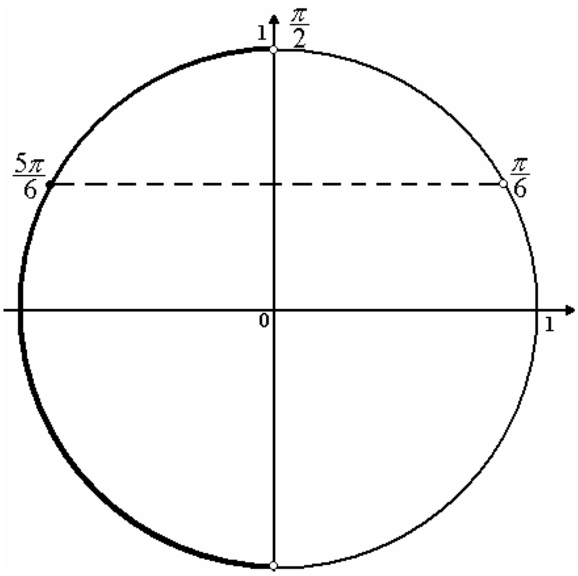
Решения и критерии оценивания заданий части 2

C1 Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\sqrt{-\cos x}} = 0$.

Решение.

1. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0, \\ -\cos x > 0. \end{cases}$

   Из неравенства получаем, что $\cos x < 0$.



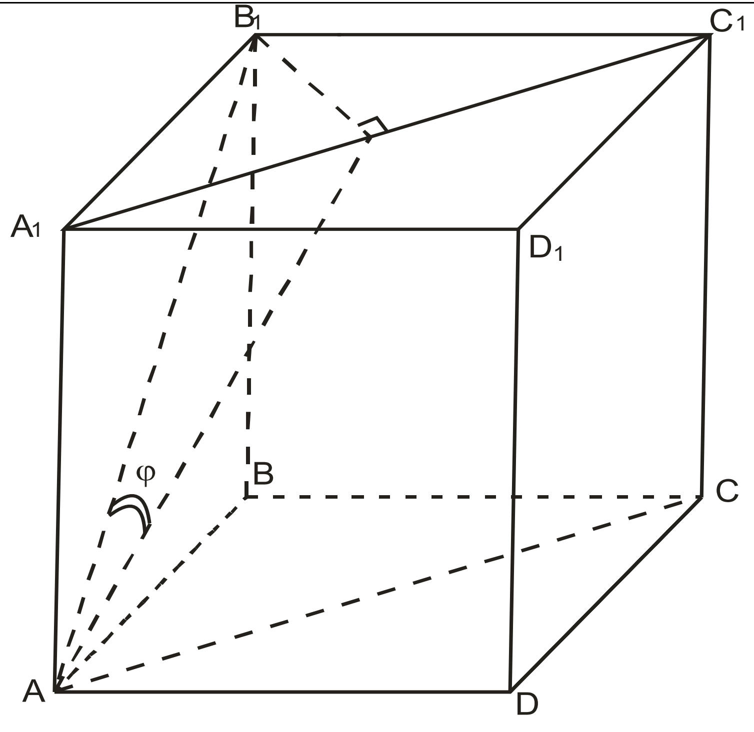
2. В уравнении сделаем замену $\sin x = t$ и решим уравнение $2t^2 - 3t + 1 = 0$. Корни уравнения: $t_1 = 1$ и $t_2 = \dfrac{1}{2}$. Равенствам $\sin x = 1$ и $\sin x = \dfrac{1}{2}$ на тригонометрической окружности соответствует только три точки (см. рисунок). Одна из них, находящаяся в левой полуплоскости, удовлетворяет условию $\cos x < 0$.
3. Получаем решение: $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания C1
2	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
1	Верно найдены нули числителя, т.е. решено тригонометрическое уравнение $2\sin^2 x - 3\sin x - 1 = 0$, но или не произведен отбор корней, или допущена ошибка в отборе.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
2	Максимальный балл.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью AA_1C, если $AA_1 = 3$, $A_1B_1 = 4$, $B_1C_1 = 6$.

Решение



1. Сечение плоскостью AA_1C есть прямоугольник AA_1C_1C. Из точки B_1 проведем перпендикуляр B_1O к прямой A_1C_1. Отрезок AO является проекцией отрезка AB_1 на плоскость AA_1C. Значит, угол между прямой AB_1 и плоскостью AA_1C равен углу B_1AO.

2. Из прямоугольного треугольника $A_1B_1C_1$ находим $B_1O = \dfrac{A_1B_1 \cdot B_1C_1}{A_1C_1} = \dfrac{12}{\sqrt{13}} = \dfrac{12\sqrt{13}}{13}$. Из прямоугольного треугольника B_1BA находим $AB_1 = 5$. Из прямоугольного треугольника B_1OA находим $\sin\varphi = \sin\angle B_1AO = \dfrac{12\sqrt{13}}{65}$. Искомый угол φ равен $\arcsin\dfrac{12\sqrt{13}}{65}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{12\sqrt{13}}{65}$.

Замечание: искомый угол можно записать, используя другие аркфункции: $\arccos\dfrac{\sqrt{2353}}{65}$, $arctg\dfrac{12\sqrt{181}}{181}$, $arcctg\dfrac{\sqrt{181}}{12}$.

Возможны другие решения. Например, решение задачи с использованием векторов или метода координат.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания C2
2	Получен и обоснован верный ответ.
1	Способ нахождения угла правильный, но получен неверный ответ или решение не закончено.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
2	Максимальный балл

$\boxed{\text{С3}}$ Решите неравенство $\log_4\left(4^x-1\right)\cdot\log_{16}\left(16^{x+1}-8\cdot4^{x+1}+16\right)>12$.

Решение.

1. Преобразуем второй логарифм:
$$\log_{16}\left(16^{x+1}-8\cdot4^{x+1}+16\right)=\log_{4^2}\left(16\left(16^x-2\cdot4^x+1\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\log_4\left(16\left(4^x-1\right)^2\right).$$
2. Следовательно, заданное неравенство принимает вид
$$\frac{1}{2}\log_4\left(4^x-1\right)\cdot\log_4\left(16\left(4^x-1\right)^2\right)>12.$$
Неравенство имеет смысл при условии $4^x-1>0$, т.е. $x>0$.
Выполним замену переменной: $t=\log_4\left(4^x-1\right)$. Отсюда, получаем неравенство $\frac{1}{2}t(2+2t)>12;\quad t^2+t-12>0$. Решением данного неравенства является объединение двух промежутков $(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)$.
3. Возвращаясь к переменной x, получаем систему:
$$\begin{cases}x>0,\\ \left[\begin{array}{l}\log_4\left(4^x-1\right)<-4,\\ \log_4\left(4^x-1\right)>3;\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ \left[\begin{array}{l}4^x<\dfrac{257}{256},\\ 4^x>65;\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ \left[\begin{array}{l}x<\log_4\dfrac{257}{256},\\ x>\log_4 65;\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ \left[\begin{array}{l}x<\log_4 257-4,\\ x>\log_4 65;\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<\log_4 257-4,\\ x>\log_4 65.\end{array}\right.$$

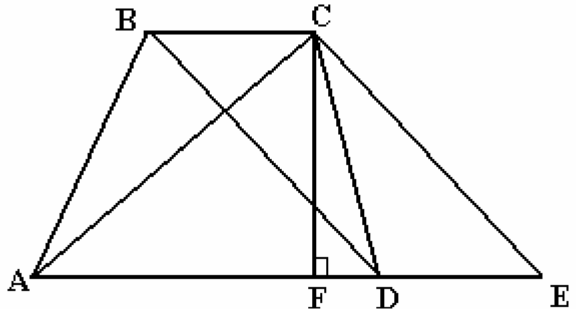
Ответ: $\left(0;\log_4 257-4\right)\cup\left(\log_4 65;+\infty\right)$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С3
3	В представленном решении обосновано получен ответ.
2	Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом значений x.
1	Ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным неравенствам.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
3	Максимальный балл.

$\boxed{\text{C4}}$ Диагонали трапеции равны 13 и $\sqrt{41}$, а высота равна 5. Найдите площадь трапеции.

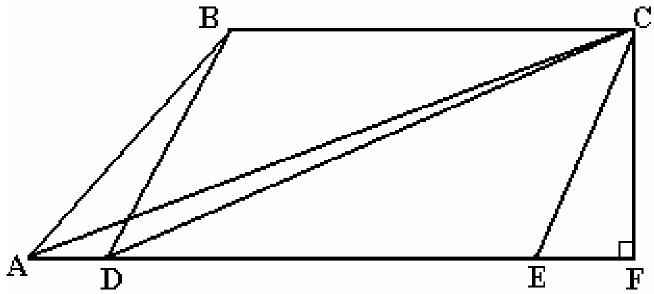
Решение

Пусть $AC = 13$, $BD = \sqrt{41}$, $CE \parallel BD$. Значит, площадь треугольника ACE равна площади трапеции $ABCD$. Возможны два случая:



1. Основание F высоты CF лежит на отрезке AE (рис.1).
Из треугольника CFA найдем:
$AF = \sqrt{AC^2 - CF^2} = 12$.
Из треугольника CFE найдем
$FE = \sqrt{CE^2 - CF^2} = 4$.

Значит, $AE = AF + FE = 16$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $S = \frac{1}{2} CF \cdot AE = 40$.



2. Основание F высоты CF лежит вне отрезка AE (рис.2). $AE = AF - FE = 8$. Площадь трапеции $ABCD$ равна
$S = \frac{1}{2} CF \cdot AE = 20$.

Ответ: 40 или 20.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С4
3	Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и обоснованно получен верный ответ.
2	Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, в которой обоснованно получено правильное значение искомой величины.
1	Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неверное из-за арифметической ошибки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
3	Максимальный балл.

С5 Найдите все значения параметра m, при которых система $\begin{cases} x+\log_2(y+4)=4, \\ y+2^x=m \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение

1. Система имеет смысл при условии $y+4>0$, т.е. $y>-4$.
   Преобразуем первое уравнение системы, учитывая ОДЗ:
   $\log_2 2^x+\log_2(y+4)=4;$
   $\log_2\left(2^x(y+4)\right)=\log_2 16.$
   Потенцируя данное уравнение, получим систему: $\begin{cases} 2^x(y+4)=16, \\ y>-4. \end{cases}$
2. Выразим из второго уравнения заданной системы 2^x: $2^x=m-y$.
   Подставим в полученную систему:
   $\begin{cases} (m-y)(y+4)=16, \\ y>-4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+(4-m)y+16-4m=0, \\ y>-4. \end{cases}$
3. Введем функцию $f(y)=y^2+(4-m)y+16-4m$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Единственное решение обеспечивается при выполнении следующих условий:
   а. $\begin{cases} D=0, \\ y_0>-4, \end{cases}$ где D - дискриминант квадратного уравнения $y^2+(4-m)y+16-4m=0$; y_0 - ордината вершины параболы.
   $D=(4-m)^2-4(16-4m)=m^2+8m-48=(m+12)(m-4).$
   $D=0$, если $m=-12$ или $m=4$, $y_0=-\frac{4-m}{2}=\frac{m-4}{2}$.
   Так как $y_0>-4$, то $\frac{m-4}{2}>-4$, т.е. $m>-4$. Условию $m>-4$ удовлетворяет только $m=4$.
   б. $\begin{cases} f(-4)=0, \\ y_0>-4 \end{cases}$ $f(-4)=16-4(4-m)+16-4m=16;\ 16>0$.
   Значит, система не имеет решений.
   в. $f(-4)<0$, т.е. $16<0$ - неверно, значит, решений нет.
4. При $m=4$ $y=0$. Значит, $2^x=4$, $x=2$. Итак, при $m=4$ заданная система уравнений имеет единственное решение $(2;0)$.

Ответ: $m=4$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С5
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
3	Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.
2	Верно рассмотрены либо все случаи 3а, 3б, 3в, либо два из них. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.
1	Хотя бы в одном из случаев 3а, 3б, 3в составлено верное условие на параметр либо получены только условия 3а, 3б, 3в, но не решены.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
4	Максимальный балл.

С6 Какое наибольшее число членов может иметь геометрическая прогрессия, все члены которой – различные натуральные числа, большие 210 и меньшие 350?

Решение.

1. Приведем пример геометрической прогрессии из четырех членов: взяв $b_1 = 216 = 6^3$ и $q = \frac{7}{6}$, имеем $b_2 = b_1 q = 216 \cdot \frac{7}{6} = 252$, $b_3 = b_2 q = 294$, $b_4 = b_3 q = 343$.
2. Докажем, что прогрессии из пяти (а значит, и более) членов, удовлетворяющей условию задачи, уже не существует.
3. Действительно, если она есть, то она без ограничения общности возрастает и состоит из целых чисел, а значит,
$$210 < b_1 < b_1 q < \ldots < b_1 q^4 = b_1 \cdot \left(\frac{m}{k}\right)^4 < 350,$$ где $1 < q = \frac{m}{k}$ - несократимая дробь ($m, k \in N$), откуда число b_1 делится на k^4 и $m^4 < 350$.
4. Так как $1^4 < 2^4 < 3^4 < 4^4 = 256 < 350 < 5^4 = 625$, то знаменатель такой прогрессии не меньше, чем $\frac{4}{3}$, поэтому,
$$b_1 q^4 \geq b_1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 > 210 \cdot \frac{256}{81} > 350,$$ что противоречит условию задачи.

Ответ: 4.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С6
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
3	Ответ правильный, но подтверждающий его пример неверен или отсутствует. Доказано, что прогрессии с большим числом членов не существует.
2	Ответ правильный и подтвержден примером прогрессии, а доказательстве того, что прогрессии с большим числом членов не существует, содержатся ошибки или пробелы.
1	Ответ и приведенный пример прогрессии верны, но принципиально неверно или отсутствует доказательство того, что прогрессии с большим числом членов не существует.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
4	Максимальный балл.

Вариант по математике № 2

Инструкция по проверке и оценке работ учащихся по математике

Часть 1

Каждое правильно выполненное задание части 1 оценивается 1 баллом. Задания части 1 считаются выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

№ задания	Ответ
B1	20
B2	2400
B3	-1
B4	3,2
B5	169900
B6	15
B7	13
B8	0,4
B9	151,5
B10	3
B11	8
B12	31

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
C1	$-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n \in Z$
C2	$\arcsin \frac{12\sqrt{5}}{65}$
C3	$(2(\log_2 7-2);\log_2 7)$
C4	10 или 2
C5	$m=3$
C6	5

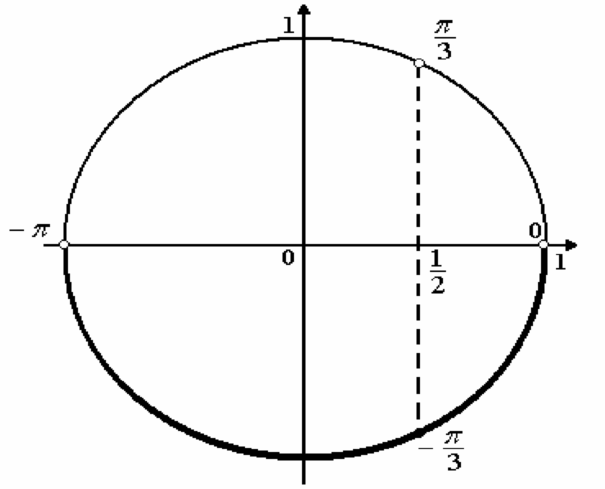
Решения и критерии оценивания заданий части 2

$\boxed{\text{С1}}$ Решите уравнение $\dfrac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{\sqrt{-\sin x}} = 0$.

Решение.

1. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0, \\ -\sin x > 0. \end{cases}$

   Из неравенства получаем, что $\sin x < 0$.



2. В уравнении сделаем замену $\cos x = t$ и решим уравнение $2t^2 + t - 1 = 0$. Корни уравнения: $t_1 = \dfrac{1}{2}$ и $t_2 = -1$. Равенствам $\cos x = \dfrac{1}{2}$ и $\cos x = -1$ на тригонометрической окружности соответствует только три точки (см. рисунок). Одна из них, находящаяся в нижней полуплоскости, удовлетворяет условию $\sin x < 0$.

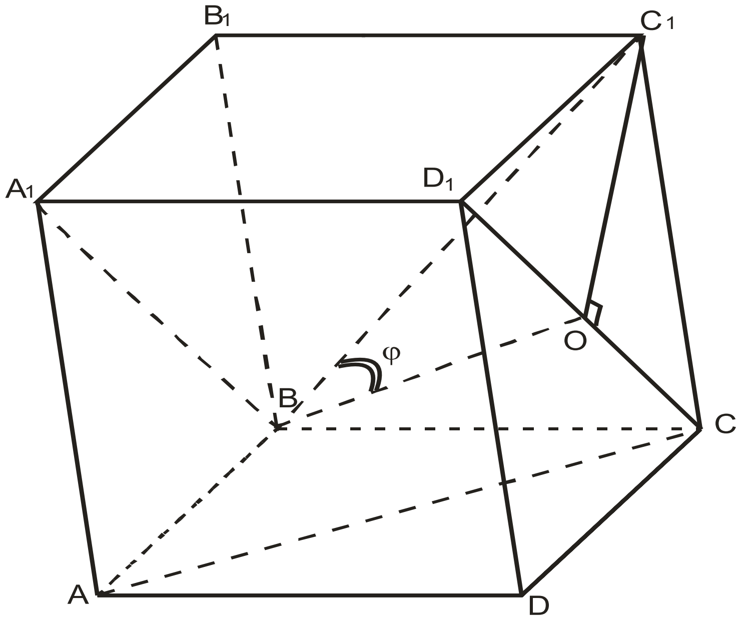
3. Получаем решение: $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С1
2	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
1	Верно найдены нули числителя, т.е. решено тригонометрическое уравнение $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, но или не произведен отбор корней, или допущена ошибка в отборе.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
2	Максимальный балл.

$\boxed{\textbf{C2}}$ В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью A_1BC, если $AA_1 = 12$, $AB = 6$, $BC = 5$.

Решение



1. Сечение плоскостью A_1BC есть прямоугольник A_1BCD_1. Из точки C_1 проведем перпендикуляр C_1O к прямой CD_1. Отрезок BO является проекцией отрезка BC_1 на плоскость A_1BC. Значит, угол между прямой BC_1 и плоскостью A_1BC равен углу C_1BO.

2. Из прямоугольного треугольника D_1C_1C находим

$$C_1O = \frac{C_1D_1 \cdot C_1C}{D_1C} = \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника BB_1C_1 находим $BC_1 = 13$.

Из прямоугольного треугольника C_1OB находим

$\sin\varphi = \sin\angle C_1BO = \dfrac{12\sqrt{5}}{65}$. Искомый угол φ равен $\arcsin\dfrac{12\sqrt{5}}{65}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{12\sqrt{5}}{65}$.

Замечание: искомый угол можно записать, используя другие аркфункции: $\arccos\dfrac{\sqrt{3505}}{65}$, $arctg\,\dfrac{12\sqrt{701}}{701}$, $arcctg\,\dfrac{\sqrt{701}}{12}$

Возможны другие решения. Например, решение задачи с использованием векторов или метода координат.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С2
2	Получен и обоснован верный ответ.
1	Способ нахождения угла правильный, но получен неверный ответ или решение не закончено.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
2	Максимальный балл

$\boxed{\text{C3}}$ Решите неравенство $\log_2\left(2^x-3\right)\cdot\log_{\sqrt{2}}\left(4^{x+2}-12\cdot 2^{x+3}+144\right)<32$.

Решение.

1. Преобразуем второй логарифм:
$\log_{\sqrt{2}}\left(4^{x+2}-12\cdot 2^{x+3}+144\right)=\log_{\sqrt{2}}\left(16\left(4^x-6\cdot 2^x+9\right)\right)=$
$=2\log_2\left(16\left(2^x-3\right)^2\right)$.

2. Следовательно, заданное неравенство принимает вид $2\cdot\log_2\left(2^x-3\right)\cdot\log_2\left(16\left(2^x-3\right)^2\right)<32$.

   Неравенство имеет смысл при условии $2^x-3>0$, т.е. $x>\log_2 3$.

   Выполним замену переменной: $t=\log_2\left(2^x-3\right)$. Отсюда, получаем неравенство $2t(4+2t)<32;\quad t^2+2t-8<0$. Решением данного неравенства является интервал $(-4;2)$.

3. Возвращаясь к переменной x, получаем двойное неравенство, при допустимых значениях x:
$-4<\log_2\left(2^x-3\right)<2;\ \frac{1}{16}<2^x-3<4;\ \log_2\frac{49}{16}<x<\log_2 7;$
$\log_2 49-4<x<\log_2 7;\ 2\left(\log_2 7-2\right)<x<\log_2 7.$

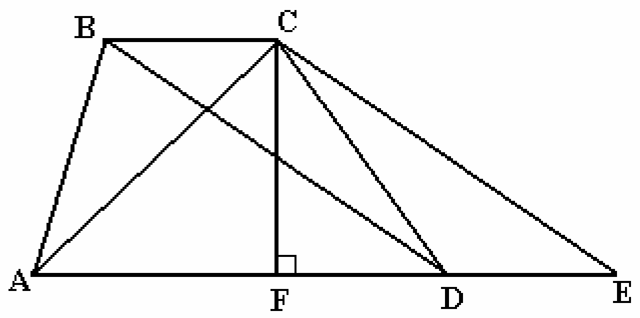
Ответ: $\left(2\left(\log_2 7-2\right);\log_2 7\right)$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С3
3	В представленном решении обосновано получен ответ.
2	Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом значений x.
1	Ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным неравенствам.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
3	Максимальный балл.

C4 Диагонали трапеции равны 5 и $\sqrt{20}$, а высота равна 4. Найдите площадь трапеции.

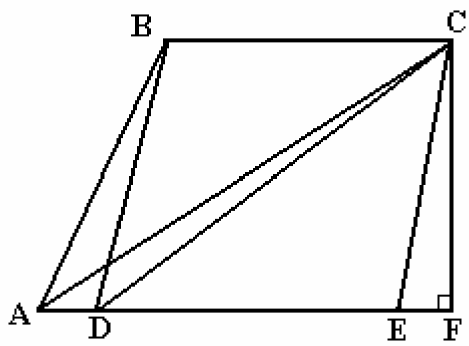
Решение

Пусть $AC = 5$, $BD = \sqrt{20}$, $CE \parallel BD$. Значит, площадь треугольника ACE равна площади трапеции $ABCD$. Возможны два случая:



1. Основание F высоты CF лежит на отрезке AE (рис.1). Из треугольника CFA найдем: $AF = \sqrt{AC^2 - CF^2} = 3$.
Из треугольника CFE найдем $FE = \sqrt{CE^2 - CF^2} = 2$.

Значит, $AE = AF + FE = 5$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $S = \frac{1}{2} CF \cdot AE = 10$.



2. Основание F высоты CF лежит вне отрезка AE (рис.2). $AE = AF - FE = 1$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $S = \frac{1}{2} CF \cdot AE = 2$.

Ответ: 10 или 2.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания C4
3	Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и обоснованно получен верный ответ.
2	Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, в которой обоснованно получено правильное значение искомой величины.
1	Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неверное из-за арифметической ошибки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
3	Максимальный балл.

C5 Найдите все значения параметра m, при которых система $\begin{cases} x+\log_3(y+3)=2, \\ y+3^x=m \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение

1. Система имеет смысл при условии $y+3>0$, т.е. $y>-3$.
   Преобразуем первое уравнение системы, учитывая О.Д.З.:
   $$\log_3 3^x+\log_3(y+3)=2;$$
   $$\log_2\left(3^x(y+3)\right)=\log_2 9.$$
   Потенцируя данное уравнение, получим систему: $\begin{cases} 3^x(y+3)=8, \\ y>-3. \end{cases}$

2. Выразим из второго уравнения заданной системы 3^x: $3^x=m-y$.
   Подставим в полученную систему:
   $$\begin{cases} (m-y)(y+3)=9, \\ y>-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-(m-3)y+16-3m=0, \\ y>-3. \end{cases}$$

3. Введем функцию $f(y)=y^2-(m-3)y+9-3m$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Единственное решение обеспечивается при выполнении следующих условий:
   а. $\begin{cases} D=0, \\ y_0>-3, \end{cases}$ где D - дискриминант квадратного уравнения $y^2-(m-3)y+9-3m=0$; y_0 - ордината вершины параболы.
   $D=(m-3)^2-4(9-3m)=m^2+6m-27=(m+9)(m-3)$.
   $D=0$, если $m=-9$ или $m=3$.
   $y_0=\dfrac{m-3}{2}$. Так как $y_0>-3$, то $\dfrac{m-3}{2}>-3$, т.е. $m>-3$.
   Условию $m>-3$ удовлетворяет только $m=3$.
   б. $\begin{cases} f(-3)=0, \\ y_0>-3 \end{cases}$ $f(-3)=9+3(m-3)+9-3m=9$; $9>0$.
   Значит, система не имеет решений.
   в. $f(-3)<0$, т.е. $9<0$ - неверно, значит, решений нет.

4. При $m=3$ $y=0$. Значит, $3^x=3$, $x=1$. Итак, при $m=3$ заданная система уравнений имеет единственное решение $(1;0)$.

Ответ: $m=3$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С5
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
3	Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.
2	Верно рассмотрены либо все случаи 3а, 3б, 3в, либо два из них. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.
1	Хотя бы в одном из случаев 3а, 3б, 3в составлено верное условие на параметр либо получены только условия 3а, 3б, 3в, но не решены.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
4	Максимальный балл.

С6 Какое наибольшее число членов может иметь геометрическая прогрессия, все члены которой – различные натуральные числа, большие 250 и меньшие 630?

Решение

1. Приведем пример геометрической прогрессии из четырех членов: взяв $b_1 = 256 = 4^4$ и $q = \frac{5}{4}$, имеем $b_2 = b_1 q = 256 \cdot \frac{5}{4} = 320$, $b_3 = b_2 q = 400$, $b_4 = b_3 q = 500$, $b_5 = b_4 q = 625$.
2. Докажем, что прогрессии из шести (а значит, и более) членов, удовлетворяющей условию задачи, уже не существует.
3. Действительно, если она есть, то она без ограничения общности возрастает и состоит из целых чисел, а значит, $250 < b_1 < b_1 q < ... < b_1 q^5 = b_1 \cdot \left(\frac{m}{k}\right)^5 < 630$, где $1 < q = \frac{m}{k}$ - несократимая дробь ($m, k \in N$), откуда число b_1 делится на k^5 и $m^5 < 630$.
4. Так как $1^5 < 2^5 < 3^5 = 243 < 630 < 4^5 = 1024$, то знаменатель такой прогрессии не меньше, чем $\frac{3}{2}$, поэтому, $b_1 q^4 \ge b_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 > 250 \cdot \frac{243}{32} > 630$, что противоречит условию задачи.

Ответ: 5.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С6
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
3	Ответ правильный, но подтверждающий его пример неверен или отсутствует. Доказано, что прогрессии с большим числом членов не существует.
2	Ответ правильный и подтвержден примером прогрессии, а доказательстве того, что прогрессии с большим числом членов не существует, содержатся ошибки или пробелы.
1	Ответ и приведенный пример прогрессии верны, но принципиально неверно или отсутствует доказательство того, что прогрессии с большим числом членов не существует.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
4	Максимальный балл.

Система оценивания 3 варианта контрольных измерительных материалов по МАТЕМАТИКЕ

Ответы к заданиям части 1

Каждое правильно выполненное задание части 1 оценивается 1 баллом. Задания части 1 считаются выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

№ задания	Ответ
B1	13
B2	11
B3	5
B4	15
B5	850
B6	15
B7	216
B8	-1,2
B9	16
B10	4000
B11	17
B12	30

Ответы к заданиям части 2

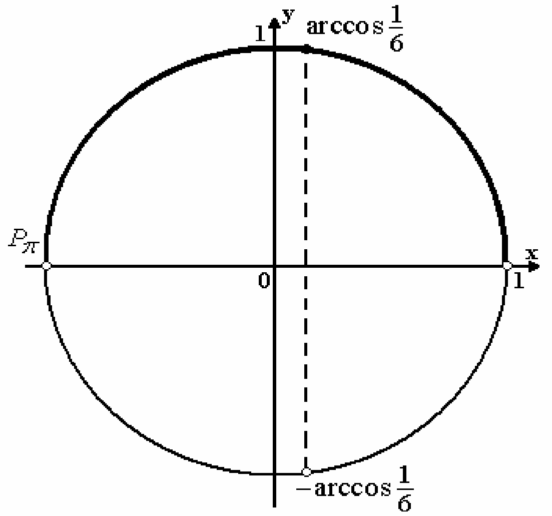
№ задания	Ответ
C1	$\arccos\frac{1}{6}+2\pi n, n\in Z$
C2	$\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{10}$
C3	$[-3;0)$
C4	100° или 20°
C5	$(0;3)\cup(3;4)$
C6	$a=2$; $b=4$

Решения и критерии оценивания заданий части 2

C1 Решите уравнение $\dfrac{6\sin^2 x - 5\cos x - 5}{\sqrt{\sin x}} = 0$.

Решение

1. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} 6\sin^2 x - 5\cos x - 5 = 0, \\ \sin x > 0. \end{cases}$



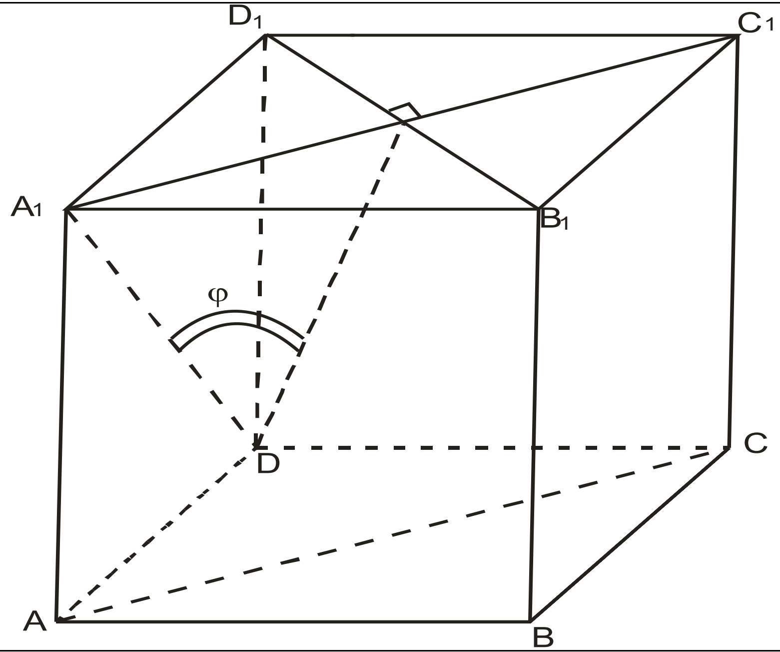
2. Решим уравнение $6\sin^2 x - 5\cos x - 5 = 0$. Заменяя $\sin^2 x$ на $1-\cos^2 x$, получаем уравнение $6\cos^2 x + 5\cos x - 1 = 0$. В полученном уравнении сделаем замену $\cos x = t$ и решим уравнение $6t^2 + 5t - 1 = 0$. Корни уравнения: $t_1 = -1$ и $t_2 = \dfrac{1}{6}$. Равенствам $\cos x = -1$ и $\cos x = \dfrac{1}{6}$ на тригонометрической окружности соответствуют три точки (см. рисунок). Одна из них, находящаяся в верхней полуплоскости, удовлетворяет условию $\sin x > 0$.
3. Получаем решение: $x = \arccos\dfrac{1}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $x = \arccos\dfrac{1}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С1
2	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
1	Верно найдены нули числителя, т.е. решено тригонометрическое уравнение $6\sin^2 x - 5\cos x - 5 = 0$, но или не произведен отбор корней, или допущена ошибка в отборе.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
2	Максимальный балл.

С2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой A_1D и плоскостью BB_1D, если $DD_1 = 8$, $A_1D_1 = 6$, $D_1C_1 = 6$.

Решение



1. Обозначим O - точку пересечения диагоналей A_1C_1 и B_1D_1 оснований прямоугольного параллелепипеда. Так как $A_1D_1 = D_1C_1$,
то $A_1B_1C_1D_1$ - квадрат. Значит, $A_1O \perp B_1D_1$.
2. Соединим точки D и O. Отрезок DO является проекцией наклонной A_1D на плоскость BB_1D.

Значит, угол между прямой A_1D и плоскостью BB_1D равен углу A_1DO.
3. Из треугольника $A_1D_1C_1$ находим $A_1C_1 = 6\sqrt{2}$. В квадрате $A_1B_1C_1D_1$ $A_1C_1 = B_1D_1 = 6\sqrt{2}$. $A_1O = \frac{1}{2}A_1C_1 = 3\sqrt{2}$. Из треугольника D_1A_1D находим $A_1D = 10$. Из треугольника A_1OD находим $\sin\varphi = \sin\angle A_1DO = \frac{3\sqrt{2}}{10}$. Искомый угол φ равен $\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Ответ: $\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Замечание: искомый угол можно записать, используя другие аркфункции: $\arccos\frac{\sqrt{82}}{10}$, $arctg\,\frac{3\sqrt{41}}{41}$, $arcctg\,\frac{\sqrt{41}}{3}$.

Возможны другие решения. Например, решение задачи с использованием векторов или метода координат.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С2
2	Получен и обоснован верный ответ.
1	Способ нахождения угла правильный, но получен неверный ответ или решение не закончено.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
2	Максимальный балл

C3 Решите неравенство $2\sqrt{\dfrac{1-4^x}{4^{x-1}}}-63\sqrt{\dfrac{4^x}{1-4^x}}\le 3\sqrt{63}$.

Решение

1. Выполним замену переменной $t=\sqrt{\dfrac{4^x}{1-4^x}}=\sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{1-4^x}{4^x}}}=\dfrac{1}{\sqrt{4^{-x}-1}}$.

   Так как $x<0$, то $t>0$. Следовательно, получаем систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{2\cdot 2}{t}-63t\le 3\sqrt{63},\\ t>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}63t^2+3t\sqrt{63}-4\ge 0,\\ t>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t\le\dfrac{-4\sqrt{7}}{21},\\ t\ge\dfrac{\sqrt{7}}{21},\end{array}\right.\\ t>0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t\ge\frac{\sqrt{7}}{21}.$$

2. Возвращаясь к переменной x, получаем двойное неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{4^{-x}-1}}\ge\frac{\sqrt{7}}{21}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0,\\ 4^{-x}-1\le 63;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0,\\ 4^{-x}\le 64;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0,\\ x\ge -3;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\le x<0.$$

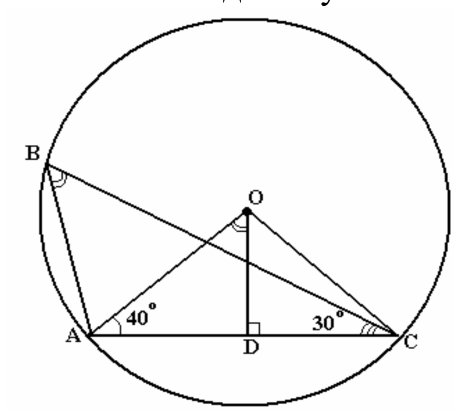
Ответ: $[-3;0)$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С3
3	В представленном решении обосновано получен ответ.
2	Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом значений x.
1	Ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верной системе неравенств.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
3	Максимальный балл.

С4 Угол между радиусом AO окружности, описанной около треугольника ABC и стороной AC равен $40°$. Найдите угол A треугольника ABC, если угол C равен $30°$.

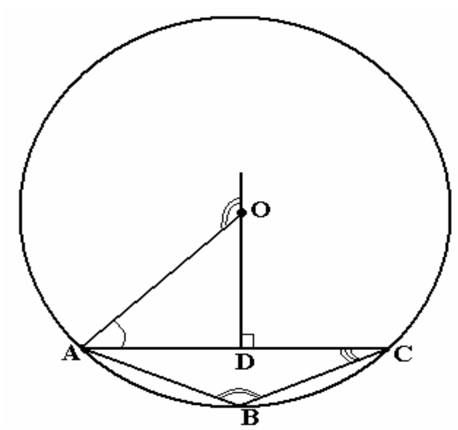
Решение

Пусть точка D - середина стороны AC. Так как точка O - центр описанной окружности не может лежать на стороне AC (иначе $\angle OAC = 0°$), то возможны два случая:



1. Точки O и B лежат по одну сторону от прямой AC (рис.1). По теореме о вписанном угле $\angle B = \frac{1}{2} \cup AC$. Угол AOC является центральным, то $\angle AOC = \cup AC$. Поэтому $\angle B = \frac{1}{2}\angle AOC$. Треугольник AOC является равнобедренным.

OD - высота, медиана и биссектриса угла AOC.
$\angle AOD = 90° - \angle OAD = 90° - 40° = 50°$. Угол B равен углу AOD, т.е. $\angle B = 50°$ (как углы при взаимно перпендикулярных сторонах). Значит, $\angle BAC = 180° - \angle B - \angle C = 180° - 50° - 30° = 100°$.



2. Точки O и B лежат по разные стороны от прямой AC (рис.2). По теореме о вписанном угле

$$\angle B = \frac{1}{2}\left(360° - \angle AOC\right) = 180 - \angle AOD = .$$
$$= 180° - 50° = 130°.$$

Значит, $\angle BAC = 180° - \angle B - \angle C =$
$= 180° - 130° - 30° = 20°$

Ответ: $100°$ или $20°$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С4
3	Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и обоснованно получен верный ответ.
2	Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, в которой обоснованно получено правильное значение искомой величины.
1	Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неверное из-за арифметической ошибки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
3	Максимальный балл.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} \log_y x = 1, \\ x^2 - 3y + a = x. \end{cases}$ имеет два решения.

Решение

1. Система имеет смысл при условии $y > 0$, $y \neq 1$, $x > 0$. Из первого уравнения системы следует, что $y = x$

   Подставим $y = x$ во второе уравнение заданной системы и получим:

   $x^2 - 3x - x + a = 0;$

   $x^2 - 4x + a = 0.$

2. Уравнение $x^2 - 4x + a = 0$ имеет два положительных решения, т.к. $x > 0$, если параметр a удовлетворяет следующим условиям:

   $\begin{cases} D > 0, \\ f(0) > 0, \\ x_0 > 0, \\ f(1) \neq 0, \end{cases}$ где D - дискриминант квадратного уравнения $x^2 - 4x + a = 0$, x_0 - абсцисса вершины параболы.

3. Введем функцию $f(x) = x^2 - 4x + a$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх. $f(0) = a$. Так как $f(0) > 0$, то $a > 0$, $f(1) = 1 - 4 + a = a - 3$. Так как $f(1) \neq 0$, то $a - 3 \neq 0$, т.е. $a \neq 3$.

   $x_0 = \frac{4}{2} = 2$, $2 > 0$ - верно.

4. Дискриминант квадратного уравнения $x^2 - 4x + a = 0$ равен $16 - 4a$. Так как $D > 0$, то $16 - 4a > 0$, т.е. $a < 4$.

5. Итак, получаем систему неравенств: $\begin{cases} a < 4, \\ a > 0, \\ 2 > 0, \\ a \neq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < a < 3, \\ 3 < a < 4. \end{array} \right.$

Ответ: $(0;3) \cup (3;4)$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С5
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
3	Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.
2	Верно получены два необходимых условия на значения параметра a, однако в результате решения либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.
1	Получено только одно необходимое условие на значения a, например, $D>0$ или $f(0)>0$, или $x_0>0$, или $f(1)\neq 0$.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
4	Максимальный балл.

С6 Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $a^b+26=\overline{ba}$ (в правой части стоит число, полученное дописыванием десятичной записи числа a после десятичной записи числа b).

Решение

В случаях $a=1$ или $b=1$ имеем: $27=1^b+26=\overline{b1}$ или $a^1+26=\overline{1a}=10^k+a$ (где a - k-значное), что невозможно. Далее считаем $a>1$ и $b>1$. Пусть $a\le 9$. Тогда для выполнения равенства необходимо условие $b\le 9$, так как иначе, есть число b - k-значное ($k\ge 2$), имеем: $a^b\ge 2^{\left(10^{k-1}\right)}\ge 2^{10(k-1)}>10^{3(k-1)}=10^{k+(2k-3)}\ge 10^{k+1}>\overline{ba}.$

Пусть $a\ge 10$. Тогда для выполнения равенства необходимы условия: $b=2$ и $a\le 31$, так как иначе, если b - k-значное, а a - $(m+1)$-значное $(m\ge 1)$, имеем:

Если $k>1$, то $a^b\ge\left(10^m\right)^{10^{k-1}}>10^{m(k+2)}=10^{(m+m)+m\cdot k}\ge 10^{(m+1)+k}>\overline{ba}$;

Если $k=1$, $b=2$, $m\ge 2$, то $a^b\ge\left(10^m\right)^2=10^{\left(m+\frac{m}{2}\right)+\frac{m}{2}}\ge 10^{(m+1)+k}>\overline{ba}$;

Если $k=1$, $b=2$, $m=1$, $a\ge 32$, то $a^b\ge(32)^2\ge 10^3=10^{(m+1)+k}>\overline{ba}$.

Конечным перебором всех пар a и b, для которых:
либо $1<a\le 9$ и $1<b\le 9$,
либо $10\le a\le 31$ и $b=2$.

Получаем, что уравнению удовлетворяет всего одна пара $a=2$, $b=4$.

Ответ: $a=2$, $b=4$.

Замечание: перебор значений a и b может быть произведен с помощью дополнительных соображений (свойство делимости, оценок величин и т.п.).

Например:

Остаются две возможности: либо $1 < a \le 9$ и $1 < b \le 9$ либо $10 \le a \le 31$ и $b = 2$. В первом случае, если $a = 2$, имеем: $10b + 2 = 2^b + 26$.

При $b > 6$ правая часть – трехзначное число. Если $b \ne 4$, то левая часть заканчивается на 2, а правая – нет. $a = 2$, $b = 4$ подходит. Если $a = 3$, имеем: $10^b + 3 = 3^b + 26$.

При $b > 3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случаи $b = 2$ и $b = 3$ не подходят.

Если $a = 4$, имеем: $10^b + 4 = 4^b + 26$.

При $b > 3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случаи $b = 2$ и $b = 3$ не подходят.

При $a \ge 5$, если $b > 2$, справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Значит, $b = 2$, но тогда $20 + a = a^2 + 26$, $a^2 - a + 6 = 0$. Решений нет. Во втором случае получаем: $200 + a = a^2 + 26$, $a^2 - a - 174 = 0$. Целых решений нет.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С6
4	В представленном решении <u>обоснованно</u> получен верный ответ.
3	Ответ правилен, но недостаточно обоснован: правильно произведен перебор не более чем двухзначных оснований степени и не более чем однозначных ее показателей, но не объяснено, почему ограничен только перечисленными случаями.
2	Ответ содержит правильную и, возможно, одну неправильную пару. Произведен перебор не более чем однозначных ее показателей, но с арифметическими ошибками или пробелами.
1	Приведена правильная пара и проверено, что она обращает уравнение в верное числовое равенство.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
4	Максимальный балл.

Система оценивания 4 варианта контрольных измерительных материалов по МАТЕМАТИКЕ

Ответы к заданиям части 1

Каждое правильно выполненное задание части 1 оценивается 1 баллом. Задания части 1 считаются выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

№ задания	Ответ
B1	8
B2	7
B3	21
B4	9
B5	800
B6	14
B7	4
B8	0,8
B9	18
B10	30000
B11	0
B12	12

Ответы к заданиям части 2

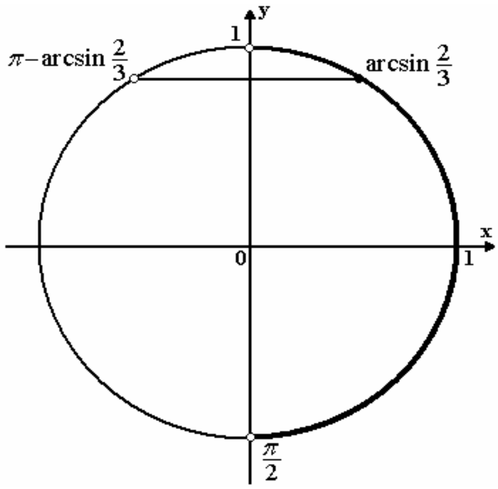
№ задания	Ответ
C1	$\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n, n\in Z$
C2	$\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$
C3	$(0;3]$
C4	$110°$ или $20°$
C5	$(-4;0)$
C6	$a=4$; $b=2$

Решения и критерии оценивания заданий части 2

C1 Решите уравнение $\dfrac{3\cos^2 x - \sin x - 1}{\sqrt{\cos x}} = 0$.

Решение.

1. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} 3\cos^2 x - \sin x - 1 = 0, \\ \cos x > 0. \end{cases}$



Решим уравнение $3\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$. Заменяя $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получаем уравнение $3\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$. В полученном уравнении сделаем замену $\sin x = t$ и решим уравнение $3t^2 + t - 2 = 0$. Корни уравнения: $t_1 = -1$ и $t_2 = \dfrac{2}{3}$. Равенствам $\sin x = -1$ и $\sin x = \dfrac{2}{3}$ на тригонометрической окружности соответствуют три точки (см. рисунок). Одна из них, находящаяся в правой полуплоскости, удовлетворяет условию $\cos x > 0$.

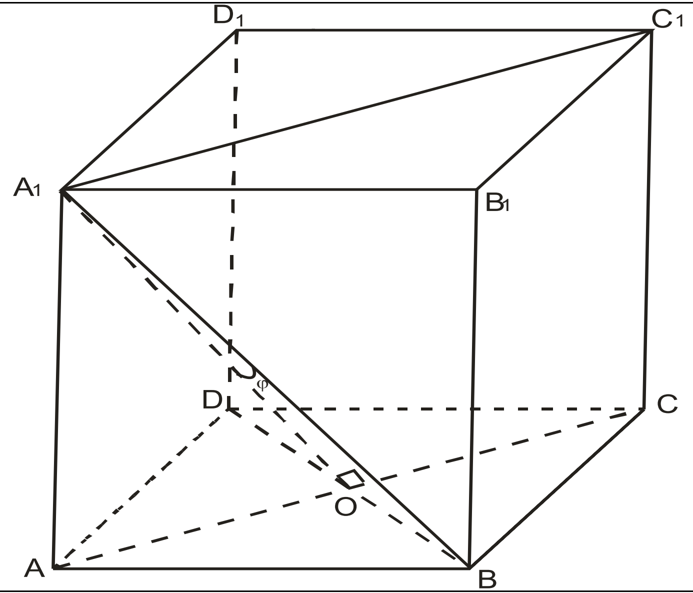
2. Получаем решение: $x = \arcsin\dfrac{2}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $x = \arcsin\dfrac{2}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания C1
2	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
1	Верно найдены нули числителя, т.е. решено тригонометрическое уравнение $3\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$, но или не произведен отбор корней, или допущена ошибка в отборе.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
2	Максимальный балл.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой A_1B и плоскостью AA_1C, если $AA_1 = 6$, $AB = 8$, $BC = 8$.

Решение



1. Обозначим O - точку пересечения диагоналей AC и BD оснований прямоугольного параллелепипеда. Так как $AB = BC$, то $ABCD$ - квадрат. Значит, $BO \perp AC$.

2. Соединим точки A_1 и O. Отрезок A_1O является проекцией наклонной A_1B на плоскость AA_1C.

Значит, угол между прямой A_1B и плоскостью AA_1C равен углу BA_1O.

3. Из треугольника ABC находим $AC = 8\sqrt{2}$. В квадрате $ABCD$ $AC = BD = 8\sqrt{2}$. $BO = \frac{1}{2}BD = 4\sqrt{2}$. Из треугольника AA_1B находим $A_1B = 10$. Из треугольника BOA_1 находим $\sin\varphi = \sin\angle BA_1O = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Искомый угол φ равен $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Замечание: искомый угол можно записать, используя другие аркфункции: $\arccos\frac{\sqrt{23}}{5}$, $arctg\,\frac{\sqrt{46}}{23}$, $arcctg\,\frac{\sqrt{46}}{2}$.

Возможны другие решения. Например, решение задачи с использованием векторов или метода координат.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С2
2	Получен и обоснован верный ответ.
1	Способ нахождения угла правильный, но получен неверный ответ или решение не закончено.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
2	Максимальный балл

С3 Решите неравенство $4\sqrt{\dfrac{2^x-1}{2^x}}+\sqrt{14}\le 14\sqrt{\dfrac{2^{x-2}}{2^x-1}}$.

Решение

1. Выполним замену переменной $t=\sqrt{\dfrac{2^x-1}{2^x}}=\sqrt{1-2^{-x}}$.

   Так как $x>0$, то $0<t<1$. Следовательно, получаем систему неравенств $\begin{cases}4t+\sqrt{14}\le\dfrac{1}{2}\cdot 14\cdot\dfrac{1}{t},\\ 0<t<1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4t^2+t\sqrt{14}-7\le 0,\\ 0<t<1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{14}}{2}\le t\le\dfrac{\sqrt{14}}{4},\\ 0<t<1;\end{cases}\Leftrightarrow$

   $$\Leftrightarrow 0<t\le\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

2. Возвращаясь к переменной x, получаем двойное неравенство:

   $$0<\sqrt{1-2^{-x}}\le\frac{\sqrt{14}}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ 1-2^{-x}\le\dfrac{7}{8};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ 2^{-x}\ge\dfrac{1}{8};\end{cases}\Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ 2^{-x}\ge 2^{-3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ x\le 3;\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\le 3.$$

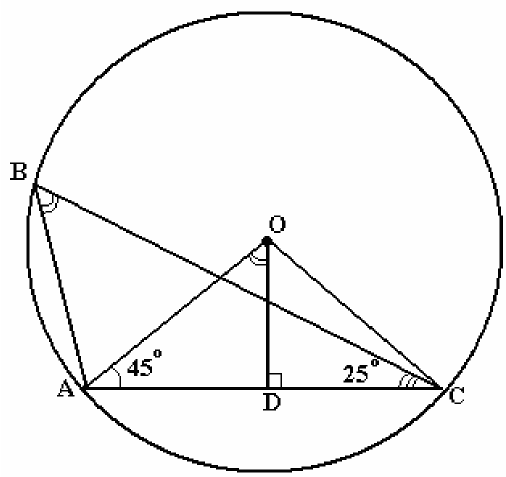
Ответ: $(0;3]$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С3
3	В представленном решении обосновано получен ответ.
2	Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом значений x.
1	Ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верной системе неравенств.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
3	Максимальный балл.

С4 Угол между радиусом AO окружности, описанной около треугольника ABC и стороной AC равен $45°$. Найдите угол A треугольника ABC, если угол C равен $25°$.

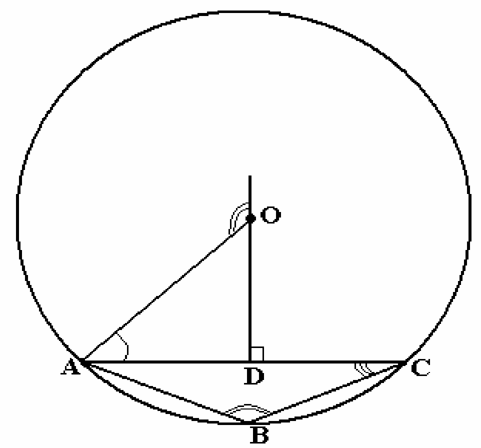
Решение

Пусть точка D - середина стороны AC. Так как точка O - центр описанной окружности не может лежать на стороне AC (иначе $\angle OAC=0°$), то возможны два случая:



1. Точки O и B лежат по одну сторону от прямой AC (рис.1). По теореме о вписанном угле $\angle B = \frac{1}{2} \cup AC$. Угол AOC является центральным, то $\angle AOC = \cup AC$. Поэтому $\angle B = \frac{1}{2}\angle AOC$. Треугольник AOC является равнобедренным.

OD - высота, медиана и биссектриса угла AOC.
$\angle AOD = 90° - \angle OAD = 90° - 45° = 45°$. Угол B равен углу AOD, т.е. $\angle B = 45°$. Значит, $\angle BAC = 180° - \angle B - \angle C = 180° - 45° - 25° = 110°$.



2. Точки O и B лежат по разные стороны от прямой AC (рис.2). По теореме о вписанном угле

$$\angle B = \frac{1}{2}\left(360° - \angle AOC\right) = 180 - \angle AOD = .$$

$= 180° - 45° = 135°.$
Значит, $\angle BAC = 180° - \angle B - \angle C =$
$= 180° - 135° - 25° = 20°$

Ответ: $110°$ или $20°$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С4
3	Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и обоснованно получен верный ответ.
2	Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, в которой обоснованно получено правильное значение искомой величины.
1	Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неверное из-за арифметической ошибки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
3	Максимальный балл.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} y = e^{\ln x}, \\ y = a + 5x - x^2; \end{cases}$ имеет два решения.

Решение

1. Система имеет смысл при условии $x > 0$. Из первого уравнения системы следует, что $y = x$. Подставим $y = x$ во второе уравнение заданной системы и получим: $x^2 - 4x - a = 0$.
2. Уравнение $x^2 - 4x - a = 0$ имеет два положительных решения, т.к. $x > 0$, если параметр a удовлетворяет следующим условиям: $\begin{cases} D > 0, \\ f(0) > 0, \\ x_0 > 0, \end{cases}$ где D - дискриминант квадратного уравнения

$x^2 - 4x - a = 0$, x_0 - абсцисса вершины параболы.

3. Введем функцию $f(x) = x^2 - 4x - a$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх. $f(0) = -a$. Так как $f(0) > 0$, то $a < 0$.

   $x_0 = 2$, $2 > 0$ - верно.
4. Дискриминант квадратного уравнения $x^2 - 4x - a = 0$ равен $16 + 4a$. Так как $D > 0$, то $16 + 4a > 0$, т.е. $a > -4$.
5. Итак, получаем систему неравенств: $\begin{cases} a > -4, \\ 2 > 0, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow -4 < a < 0.$

Ответ: $(-4;0)$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С5
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
3	Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.
2	Верно получены два необходимых условия на значения параметра a, однако в результате решения либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.
1	Получено только одно необходимое условие на значения a, например, $D > 0$ или $f(0) > 0$, или $x_0 > 0$.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
4	Максимальный балл.

$\boxed{\text{C6}}$ Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $a^b+8=\overline{ba}$ (в правой части стоит число, полученное дописыванием десятичной записи числа a после десятичной записи числа b).

Решение

В случаях $a=1$ или $b=1$ имеем: $9=1^b+8=\overline{b1}$ или $a^1+8=\overline{1a}=10^k+a$ (где a - k-значное), что невозможно. Далее считаем $a>1$ и $b>1$. Пусть $a\le 9$. Тогда для выполнения равенства необходимо условие $b\le 9$, так как иначе, есть число b - k-значное ($k\ge 2$), имеем: $a^b\ge 2^{\left(10^{k-1}\right)}\ge 2^{10(k-1)}>10^{3(k-1)}=10^{k+(2k-3)}\ge 10^{k+1}>\overline{ba}.$

Пусть $a\ge 10$. Тогда для выполнения равенства необходимы условия: $b=2$ и $a\le 31$, так как иначе, если b - k-значное, а a - $(m+1)$-значное $(m\ge 1)$, имеем:

Если $k>1$, то $a^b\ge\left(10^m\right)^{10^{k-1}}\ge 10^{m(k+2)}=10^{(m+m)+m\cdot k}\ge 10^{(m+1)+k}>\overline{ba};$

Если $k=1$, $b\ge 3$, то $\left(10^m\right)^3=10^{(m+m)+m}\ge 10^{(m+1)+k}>\overline{ba}$;

Если $k=1$, $b=2$, $m\ge 2$, то $\left(10^m\right)^2=10^{\left(m+\frac{m}{2}\right)+\frac{m}{2}}\ge 10^{(m+1)+k}>\overline{ba}$;

Если $k=1$, $b=2$, $m=1$, $a\ge 32$, то

$(32)^2\ge 10^3=10^{(m+1)+k}>\overline{ba}$.

Конечным перебором всех пар a и b, для которых:

либо $1<a\le 9$ и $1<b\le 9$,

либо $10\le a\le 31$ и $b=2$.

Получаем, что уравнению удовлетворяет всего одна пара $a=4$, $b=2$.

Ответ: $a=4$, $b=2$.

Замечание: перебор значений a и b может быть произведен с помощью дополнительных соображений (свойство делимости, оценок величин и т.п.).

Например:

Остаются две возможности: либо $1<a\le 9$ и $1<b\le 9$ либо $10\le a\le 31$ и $b=2$. В первом случае, если $a=2$, имеем: $10b+2=2^b+8$.

При $b>6$ правая часть – трехзначное число. Если $b\ne 2$, $b\ne 6$, то левая часть заканчивается на 2, а правая – нет. Но ни $b=2$, ни $b=6$ не подходят.

Если $a=3$, имеем: $10^b+3=3^b+8$.

При $b>4$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случай $b=2$, $b=3$, $b=4$ не подходят.

Если $a=4$, имеем: $10^b+4=4^b+8$.

При $b > 3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случаи $b = 2$ подходит, а $b = 3$ не подходят.
При $a \geq 5$, если $b > 2$, справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Значит, $b = 2$, но тогда $20 + a = a^2 + 8$, $a^2 - a - 12 = 0$, откуда $a = 4$ - уже разобранный случай. Во втором случае $200 + a = a^2 + 8$, $a^2 - a - 192 = 0$. Целых решений нет.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С6
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
3	Ответ правилен, но недостаточно обоснован: правильно произведен перебор не более чем двухзначных оснований степени и не более чем однозначных ее показателей, но не объяснено, почему ограничен только перечисленными случаями.
2	Ответ содержит правильную и, возможно, одну неправильную пару. Произведен перебор не более чем однозначных ее показателей, но с арифметическими ошибками или пробелами.
1	Приведена правильная пара и проверено, что она обращает уравнение в верное числовое равенство.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
4	Максимальный балл.