

Решение квадратных неравенств графическим способом.

Пример 1.

$$x^2 - 4x - 5 > 0$$

1. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 4x - 5$, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вверх, т. к. $a = 1 > 0$.

2. Находим координаты вершины параболы $(x_B; y_B)$ по формулам:

$$x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2 \quad y_B = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = -9 \quad (2; -9)$$

3. Находим нули функции $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$ (если они есть), решая уравнение:

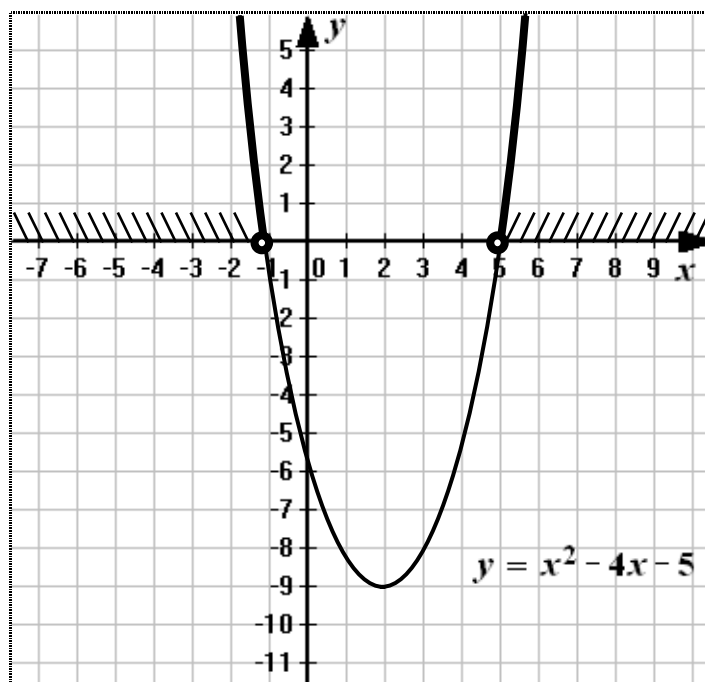
$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 6}{2} = -1 \quad (-1; 0)$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 6}{2} = 5 \quad (5; 0)$$

4. Строим схематично график:



5. На графике находим точки, соответствующие указанному неравенству (> 0), ординаты которых положительны (т. е. выше оси Ox), определяем, при каких значениях x получаются эти точки.

6. Записываем полученные промежутки: $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

7. Ответ: $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

Решение квадратных неравенств графическим способом.

Пример 2.

$$-2x^2 + 12x - 10 \geq 0$$

1. Рассмотрим функцию $y = -2x^2 + 12x - 10$, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вниз, т. к. $a = -2 < 0$.

2. Находим координаты вершины параболы $(x_B; y_B)$ по формулам:

$$x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot (-2)} = 3; \quad y_B = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 10 = 8 \quad (3; 8)$$

3. Находим нули функции $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$ (если они есть), решая уравнение:

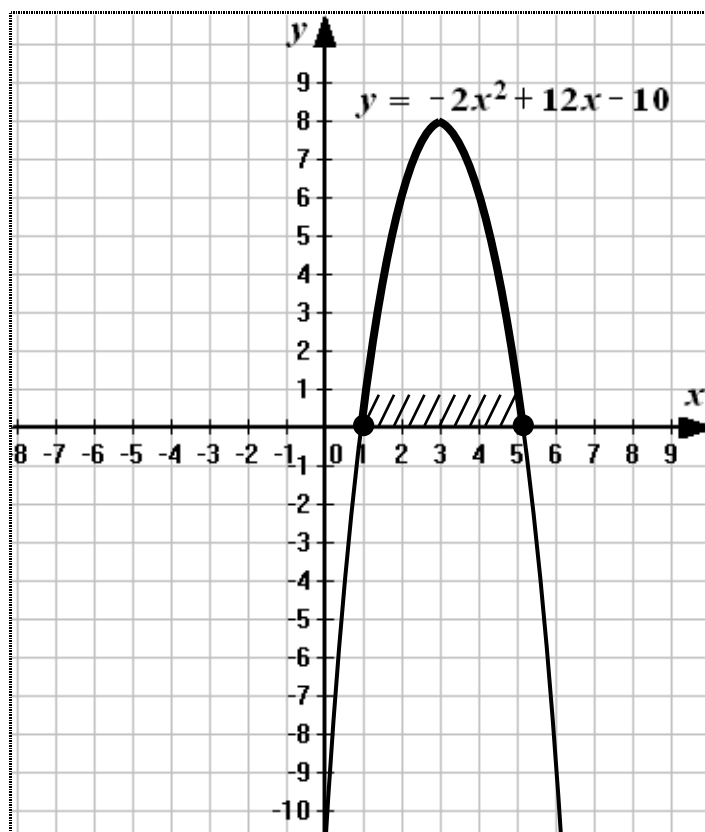
$$-2x^2 + 12x - 10 = 0 \quad | :(-2)$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 - 4}{2} = 1; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 + 4}{2} = 5 \quad (1; 0) \text{ и } (5; 0)$$

4. Строим схематично график:



5. На графике находим точки, соответствующие указанному неравенству (≥ 0), ординаты которых неотрицательны (т. е. не ниже оси Ox), определяем, при каких значениях x получаются эти точки.

6. Записываем полученный промежуток: $x \in [1; 5]$.

7. Ответ: $[1; 5]$.

Решение квадратных неравенств графическим способом.

Пример 3.

$$0,2x^2 + 1,6x + 5,2 > 0$$

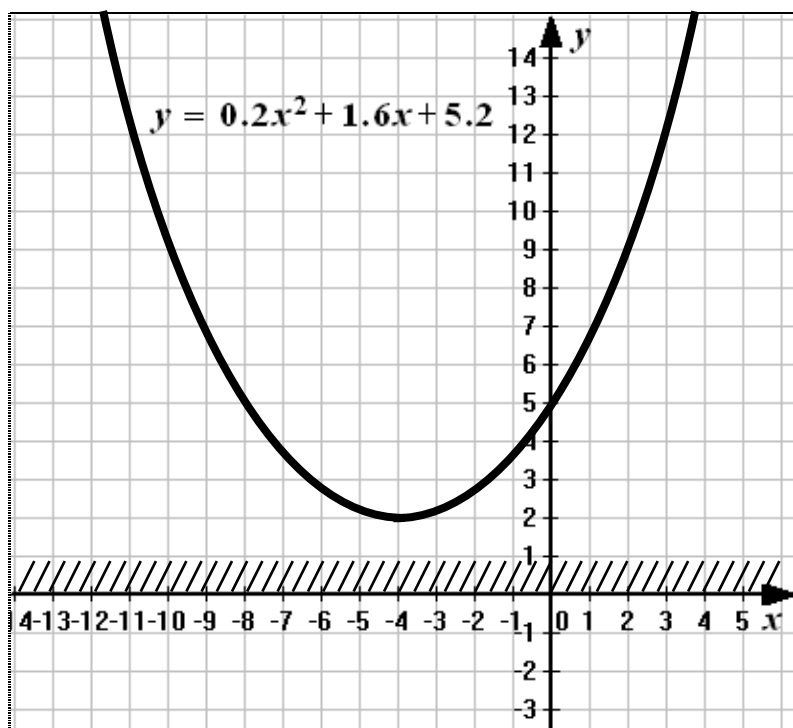
1. Рассмотрим функцию $y = 0,2x^2 + 1,6x + 5,2$, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вверх, т. к. $a = 0,2 > 0$.
2. Находим координаты вершины параболы $(x_B; y_B)$ по формулам:

$$x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{1,6}{2 \cdot 0,2} = -4 \quad y_B = 0,2(-4)^2 + 1,6 \cdot (-4) + 5,2 = 3,2 - 6,4 + 5,2 = 2 \quad (-4; 2)$$
3. Находим нули функции $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$ (если они есть), решая уравнение:

$$0,2x^2 + 1,6x + 5,2 = 0 \quad | : 0,2$$

$$x^2 + 8x + 26 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26 = 64 - 104 = -40 < 0 \Rightarrow \text{нет точек пересечения с осью } Ox.$$
4. Строим схематично график:



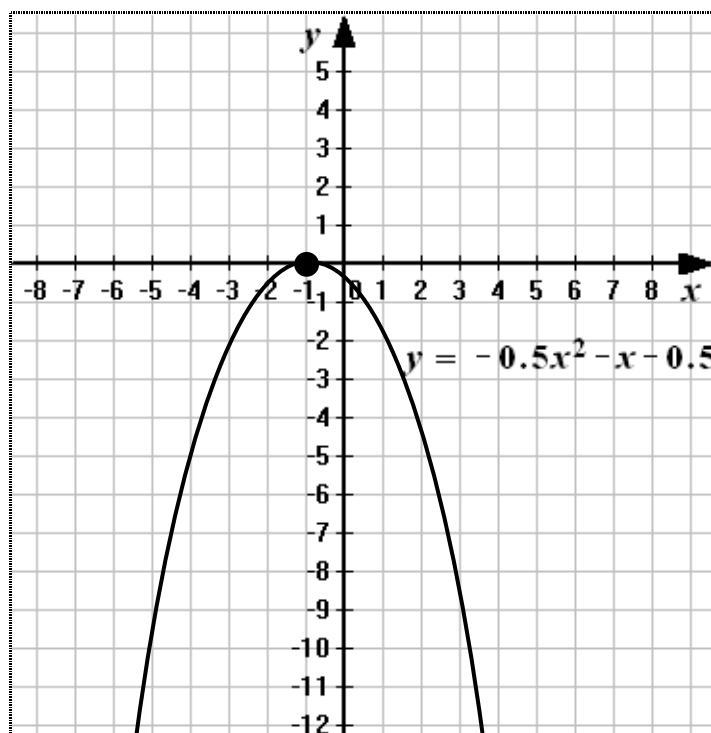
5. На графике находим точки, соответствующие указанному неравенству (> 0), ординаты которых положительны (т. е. выше оси Ox), определяем, при каких значениях x получаются эти точки.
6. Все точки параболы удовлетворяют этому условию.
7. Записываем полученный промежуток: $x \in (-\infty; +\infty)$.
8. Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Решение квадратных неравенств графическим способом.

Пример 4.

$$-0,5x^2 - x - 0,5 \geq 0$$

1. Рассмотрим функцию $y = -0,5x^2 - x - 0,5$, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вниз, т. к. $a = -0,5 < 0$.
2. Находим координаты вершины параболы $(x_B; y_B)$ по формулам:
$$x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot (-0,5)} = -1; \quad y_B = -0,5 \cdot (-1)^2 - (-1) - 0,5 = 0 \quad (-1; 0)$$
3. Находим нули функции $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$ (если они есть), решая уравнение:
$$-0,5x^2 - x - 0,5 = 0 \quad | \cdot (-2)$$
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$(x + 1)^2 = 0$$
$$x + 1 = 0$$
$$x = -1 \quad (-1; 0)$$
4. Вершина параболы совпадает с единственным нулем функции.
5. Строим схематично график:



6. На графике находим точки, соответствующие указанному неравенству (≥ 0), ординаты которых неотрицательны (т. е. не ниже оси Ox), определяем, при каких значениях x получаются эти точки.
7. Такая точка – единственная: $x \in \{-1\}$.
8. Ответ: $\{-1\}$.

Решение квадратных неравенств графическим способом.

Пример 5.

$$x^2 - 4x - 5 < 0$$

1. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 4x - 5$, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вверх, т. к. $a = 1 > 0$.

2. Находим координаты вершины параболы $(x_B; y_B)$ по формулам:

$$x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2 \quad y_B = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = -9 \quad (2; -9)$$

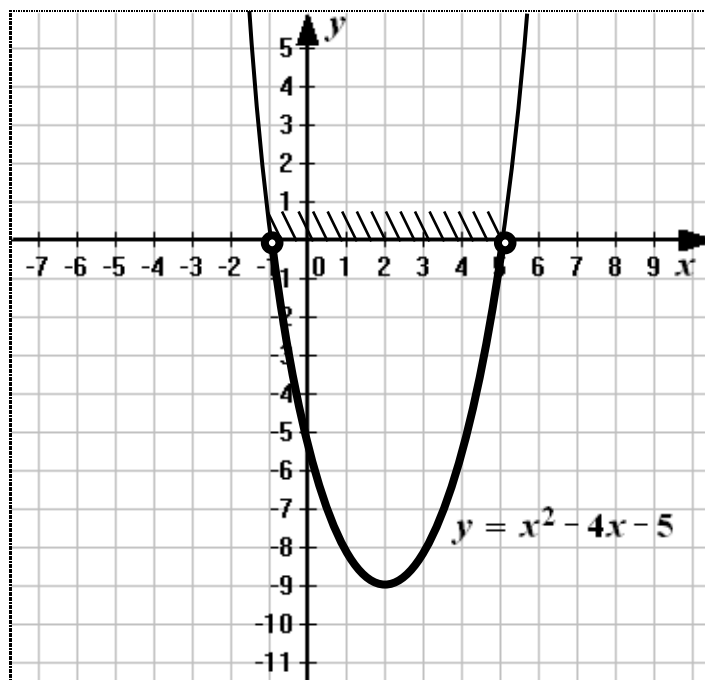
3. Находим нули функции $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$ (если они есть), решая уравнение:
 $x^2 - 4x - 5 = 0$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 6}{2} = -1 \quad (-1; 0)$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 6}{2} = 5 \quad (5; 0)$$

4. Строим схематично график:



5. На графике находим точки, соответствующие указанному неравенству (< 0), ординаты которых отрицательны (т. е. ниже оси Ox), определяем, при каких значениях x получаются эти точки.

6. Записываем полученный промежуток: $x \in (-1; 5)$.

7. Ответ: $(-1; 5)$.

Решение квадратных неравенств графическим способом.

Пример 6.

$$-2x^2 + 12x - 10 \leq 0$$

1. Рассмотрим функцию $y = -2x^2 + 12x - 10$, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вниз, т. к. $a = -2 < 0$.

2. Находим координаты вершины параболы $(x_B; y_B)$ по формулам:

$$x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot (-2)} = 3; \quad y_B = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 10 = 8 \quad (3; 8)$$

3. Находим нули функции $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$ (если они есть), решая уравнение:

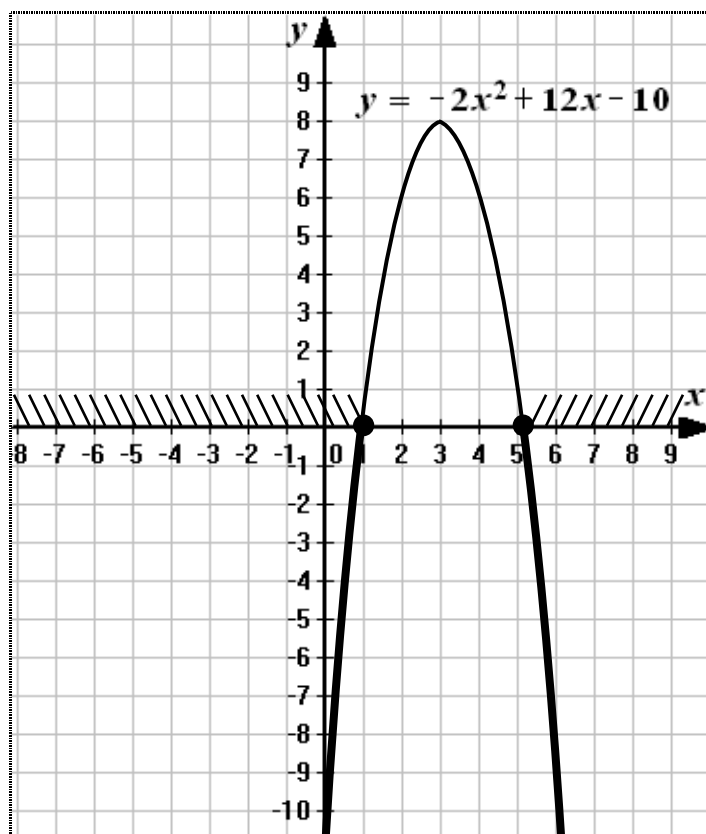
$$-2x^2 + 12x - 10 = 0 \quad | :(-2)$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 - 4}{2} = 1; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 + 4}{2} = 5 \quad (1; 0) \quad (5; 0)$$

4. Строим схематично график:



5. На графике находим точки, соответствующие указанному неравенству (≤ 0), ординаты которых неположительны (т. е. не выше оси Ox), определяем, при каких значениях x получаются эти точки.

6. Записываем полученные промежутки: $x \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$.

7. Ответ: $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$.

Решение квадратных неравенств графическим способом.

Пример 7.

$$0,2x^2 + 1,6x + 5,2 < 0$$

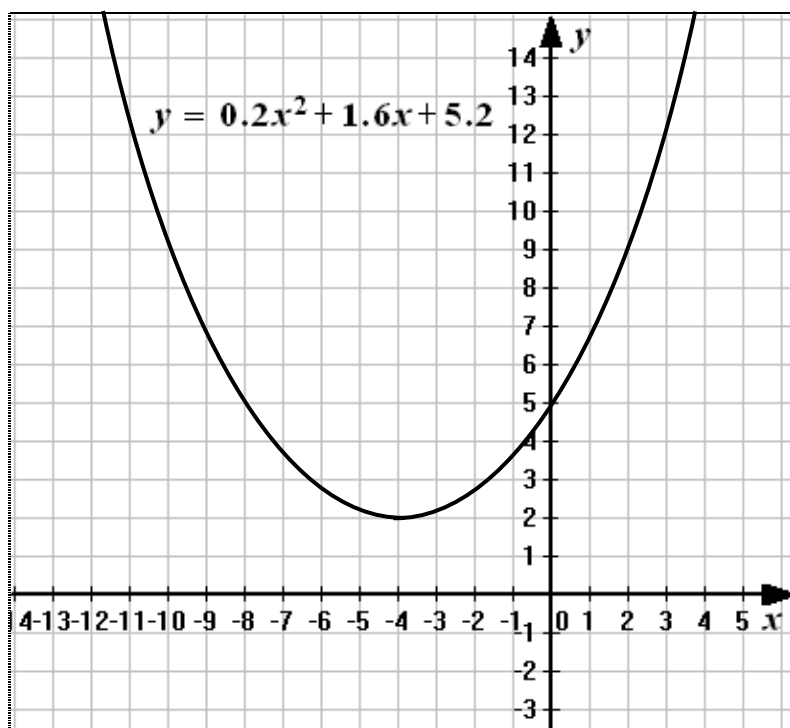
1. Рассмотрим функцию $y = 0,2x^2 + 1,6x + 5,2$, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вверх, т. к. $a = 0,2 > 0$.
2. Находим координаты вершины параболы $(x_B; y_B)$ по формулам:

$$x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{1,6}{2 \cdot 0,2} = -4 \quad y_B = 0,2(-4)^2 + 1,6 \cdot (-4) + 5,2 = 3,2 - 6,4 + 5,2 = 2 \quad (-4; 2)$$
3. Находим нули функции $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$ (если они есть), решая уравнение:

$$0,2x^2 + 1,6x + 5,2 = 0 \quad | : 0,2$$

$$x^2 + 8x + 26 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26 = 64 - 104 = -40 < 0 \Rightarrow \text{нет точек пересечения с осью } O_x.$$
4. Строим схематично график:



5. На графике находим точки, соответствующие указанному неравенству (< 0), ординаты которых отрицательны (т. е. ниже оси O_x), определяем, при каких значениях x получаются эти точки.
6. Ни одна точка параболы не удовлетворяет этому условию.
7. Записываем полученный промежуток: $x \in \emptyset$.
8. Ответ: нет решений.

Решение квадратных неравенств графическим способом.

Пример 8.

$$-0,5x^2 - x - 0,5 \leq 0$$

1. Рассмотрим функцию $y = -0,5x^2 - x - 0,5$, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вниз, т. к. $a = -0,5 < 0$.
2. Находим координаты вершины параболы $(x_B; y_B)$ по формулам:

$$x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot (-0,5)} = -1; \quad y_B = -0,5 \cdot (-1)^2 - (-1) - 0,5 = 0 \quad (-1; 0)$$
3. Находим нули функции $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$ (если они есть), решая уравнение:

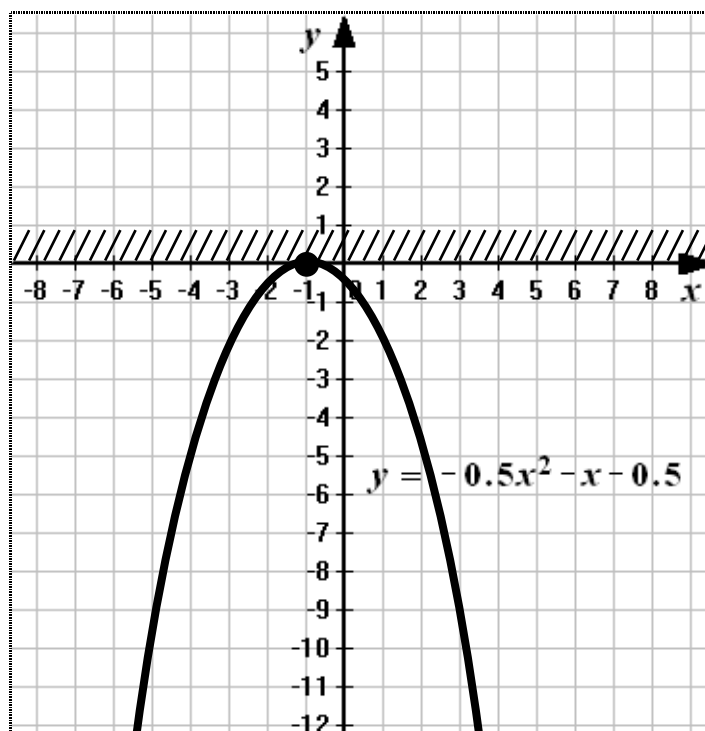
$$-0,5x^2 - x - 0,5 = 0 \quad | \cdot (-2)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x + 1)^2 = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1 \quad (-1; 0)$$
4. Вершина параболы совпадает с единственным нулем функции.
5. Строим схематично график:



6. На графике находим точки, соответствующие указанному неравенству (≤ 0), ординаты которых неположительны (т. е. не выше оси Ox), определяем, при каких значениях x получаются эти точки.
7. Все точки параболы удовлетворяют этому условию.
8. Записываем полученный промежуток: $x \in (-\infty; +\infty)$.
9. Ответ: $(-\infty; +\infty)$.